

旋转对三维边界层的影响研究

北京航空航天大学 祖国君* 陈矛章

【摘要】 总结了目前已知的一些旋转的基本现象。在对三维旋转不可压边界层方程进行认真地分析的基础上, 详细、深入地讨论了旋转产生的离心惯性力、哥氏惯性力以及法向压力梯度不为零 ($\partial p / \partial x^2 \neq 0$) 对三维边界层计算结果的影响, 得到了一些具有一定参考价值的结论。

关键词: 三维 边界层 旋转

1 前 言

现代叶轮机械是以高速旋转为特点的, 旋转产生的哥氏惯性力和离心惯性力对粘性流动产生多大的影响, 是值得研究的课题。从目前的理论和实验研究成果中, 可以总结出旋转所引起的一些基本现象: (1) 旋转产生并加剧叶轮机转子表面的径向流动, 使边界层扭曲, 导致明显的三维效应^[1]。(2) 旋转产生的离心惯性力和哥氏惯性力改变了转子表面的摩擦应力和法向压力梯度^[2]。(3) 旋转不仅改变了平均流向特性, 而且对湍流结构也有很大影响^[3]。(4) 旋转还会影响边界层的稳定性, 对湍流具有增强或抑制作用。(5) 旋转对径向湍流特性影响最为显著, 大多数情况下对湍流强度和应力具有增加的作用^[3, 4]。

除此之外, 旋转还会对叶面的极限流线角、边界层的动量厚度、边界层堵塞以及转子尾迹等产生不同程度的影响。这些现象对于压气机气动设计有着重大的意义。

人们对以叶轮机转子叶面为对象而开展的三维旋转边界层的研究工作不多的主要原因在于实验测量的难度很大。目前只有 Lakshminarayana^[1, 3, 5]、Toyokura^[6]、Dring^[7]曾在不同程度上对三维旋转边界层的速度剖面等做了实验研究工作。在这种情况下, 由于实验数据很少, 数值方法的发展就受到了限制。仅见到的几篇用差分法计算三维旋转边界层的文章, 如 Thompkins^[8]的准三维计算, Anderson^[9]以及华耀南^[10]对转子叶面的计算等, 也只是同实验结果做了一些对比, 来验证程序。至于旋转所引起的离心惯性力、哥氏惯性力, 尤其是法向压力梯度 ($\partial p / \partial x^2 \neq 0$) 到底对计算结果有多大的影响, 还很少有专门的讨论。

鉴于旋转问题的重要性以及目前的研究现状, 本文详细、深入地研究了离心惯性力、哥氏惯性力及 $\partial p / \partial x^2 \neq 0$ 对三维边界层计算结果的影响, 所得结论与实验揭示的现象是一致的。

2 三维旋转边界层方程与分析

在固壁非正交曲线坐标系上, 三维定常不可压边界层的基本方程为^[11]:

连续方程
$$\frac{\partial W^1}{\partial x^1} \frac{g_{33} \sin \theta}{\alpha^1} + \frac{\partial W^2}{\partial x^2} \frac{g_{11} g_{33} \sin \theta}{\alpha^2} + \frac{\partial W^3}{\partial x^3} \frac{g_{11} \sin \theta}{\alpha^3} = 0 \quad (1)$$

x^1 方向动量方程

$$\begin{aligned} & \frac{W^1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial W^1}{\partial x^1} + W^2 \frac{\partial W^1}{\partial x^2} + \frac{W^3}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial W^1}{\partial x^3} - K_1 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (W^1)^2 + \frac{K_2}{\sin \theta} (W^3)^2 + K_{12} W^1 W^3 \\ & - \frac{\Omega^2 R}{\sin^2 \theta} [\cos(\vec{R}, \vec{e}_1) - \cos(\vec{R}, \vec{e}_3) \cos \theta] - \frac{2\Omega \cos(\vec{\Omega}, \vec{e}_3)}{\sin \theta} (\cos \theta W^1 + W^3) \\ & = - \frac{1}{\rho \sin^2 \theta} \frac{\partial p}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\cos \theta}{\rho \sin^2 \theta} \frac{\partial p}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\mu \frac{\partial W^1}{\partial x^2} - \mu \cos \theta \frac{\partial W^3}{\partial x^2} - \rho \overline{w^1 w^2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

x^2 方向动量方程

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^2} = -\Omega^2 R \cos(\vec{R}, \vec{e}_2) - 2\Omega \cos(\vec{\Omega}, \vec{e}_3) \frac{W^1 + \cos \theta W^3}{\sin \theta} + 2\Omega \cos(\vec{\Omega}, \vec{e}_1) \frac{\cos \theta W^1 + W^3}{\sin \theta} \quad (3)$$

x^3 方向动量方程

$$\begin{aligned} & \frac{W^1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial W^3}{\partial x^1} + W^2 \frac{\partial W^3}{\partial x^2} + \frac{W^3}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial W^3}{\partial x^3} - K_2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (W^3)^2 + \frac{K_1}{\sin \theta} (W^1)^2 + K_{21} W^1 W^3 \\ & - \frac{\Omega^2 R}{\sin^2 \theta} [\cos(\vec{R}, \vec{e}_3) - \cos(\vec{R}, \vec{e}_1) \cos \theta] + \frac{2\Omega \cos(\vec{\Omega}, \vec{e}_1)}{\sin \theta} (\cos \theta W^3 + W^1) \\ & = - \frac{1}{\rho \sin^2 \theta} \frac{\partial p}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\cos \theta}{\rho \sin^2 \theta} \frac{\partial p}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\mu \frac{\partial W^3}{\partial x^2} - \mu \cos \theta \frac{\partial W^1}{\partial x^2} - \rho \overline{W^3 W^2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

其中 W^1 、 W^2 、 W^3 分别为坐标 x^1 、 x^2 、 x^3 方向的逆变物理分量, x^2 为壁面法向坐标, g 为曲线坐标系中的度量系数, K 为短线曲率, θ 为平行于壁面的坐标 x^1 与 x^3 的夹角, Ω 为旋转矢量, R 为矢径, $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 、 $\vec{e}_3$ 为坐标 x^1 、 x^2 、 x^3 的方向矢量。

分析这组方程可以发现, 旋转的作用以哥氏惯性力和离心惯性力的形式出现在动量方程中, 对计算结果会有一定的影响; 而且同曲率的影响一样, 旋转引起的 $\partial p / \partial x^2 \neq 0$, 当其量级足够大时不能忽略; 除此之外, 旋转还会对湍流的结构产生影响。

3 离心惯性力和哥氏惯性力在边界层中的作用

注意到在动量方程 (2~4) 中, 离心惯性力项是具有 $\Omega^2 R$ 的项, 这里用 Centri 表示; 哥氏惯性力项具有 ΩW^1 和 ΩW^3 的形式, 用 Coriol 来表示。动量方程经变换 (见文献 [11]), Coriol 包含在系数 m_{13} 、 m_{14} 、 m_{15} 及 m_{16} 中; Centri 包含在 m_{11} 、 m_{12} 中, 而 η 方向动量方程则主要由 Coriol 和 Centri 组成。令: $\text{Coriol}1 = C_o \Omega W^1$, $\text{Coriol}2 = C_o \Omega W^3$ ($C_o = 0$ 或 1), $\text{Centri} = C_e \Omega^2 R$ ($C_e = 0$ 或 1) 则:

$$\begin{aligned} m_{11} &= \frac{S_1}{(W_e^1 \sin \theta)^2} \left\{ C_e \Omega^2 R [\cos(\vec{R}, \vec{e}_1) - \cos \theta \cos(\vec{R}, \vec{e}_3)] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{g_{11}} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial p}{g_{33}} \frac{\partial}{\partial x^3} \right\} \\ m_{12} &= \frac{S_1}{(W_e^1 W_{ref} \sin^2 \theta)} \left\{ C_e \Omega^2 R [\cos(\vec{R}, \vec{e}_3) - \cos \theta \cos(\vec{R}, \vec{e}_1)] + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial p}{g_{11}} \frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{g_{33}} \frac{\partial}{\partial x^3} \right\} \\ m_{13} &= - \frac{S_1}{W_e^1} C_o \frac{2\Omega \cos \theta \cos(\vec{\Omega}, \vec{e}_2)}{\sin \theta}, \quad m_{14} = - \frac{S_1}{W_e^1} \frac{W_{ref}}{W_e^1} C_o \frac{2\Omega \cos(\vec{\Omega}, \vec{e}_2)}{\sin \theta} \\ m_{15} &= - \frac{S_1}{W_e^1} C_o \frac{2\Omega \cos(\vec{\Omega}, \vec{e}_2)}{\sin \theta}, \quad m_{16} = - \frac{S_1}{W_e^1} \frac{W_{ref}}{W_e^1} C_o \frac{2\Omega \cos \theta \cos(\vec{\Omega}, \vec{e}_2)}{\sin \theta} \end{aligned} \quad (5)$$

动量方程 (3) 变为

$$\begin{aligned} \partial p / \partial \eta &= (\rho \mu_e S_1 / W_e^1)^{1/2} \{ C_e \Omega^2 R \cos(\vec{\Omega}, \vec{e}_2) - C_o 2\Omega W_e^1 g' [\cos \theta \cos(\vec{\Omega}, \vec{e}_1) - \cos(\vec{\Omega}, \vec{e}_3)] / \sin \theta \\ &\quad - C_o 2\Omega W_{ref} g' [\cos(\vec{\Omega}, \vec{e}_1) - \cos \theta \cos(\vec{\Omega}, \vec{e}_3)] / \sin \theta \} \end{aligned}$$

(5) 式分别对应下面四种状态: (1) $C_o = C_e = 0$, 即离心惯性力及哥氏惯性力都不考虑, 用无旋转的方程计算旋转问题; (2) $C_o = 0$, $C_e = 1$, 只考虑离心惯性力作用; (3) $C_o = 1$, $C_e = 0$, 只考虑哥氏惯性力作用; (4) $C_o = C_e = 1$, 充分考虑旋转的作用。

下面在压气机转子压力面及吸力面上, 对应上述四种状态, 考查旋转效应。对于本算例的描述及与实验的对比, 可参阅文献 [11]。

3. 1 吸力面

首先考察旋转对吸力面上的速度分布的影响, 任取叶面中部一点 ($R = 0.8$, $S = 0.7$) 作为

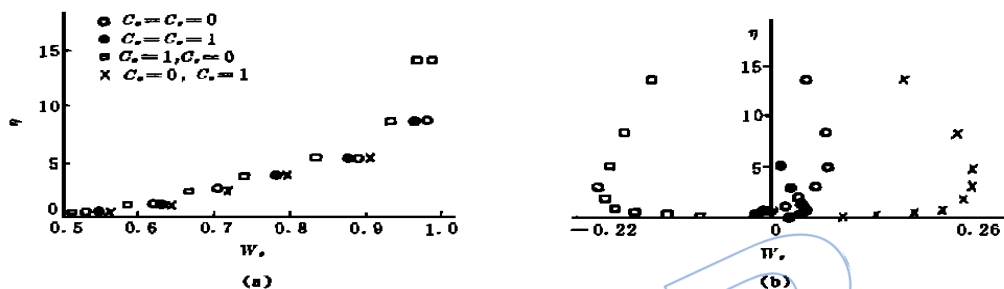


图 1 压气机转子吸力面流向、横向速度型 (a. 流向; b. 横向)

研究对象。图 1a 给出了四种状态下流向速度的对比情况。从中可以看出, 离心惯性力与哥氏惯性力具有不同的作用, 前者使流向速度变大, 后者刚好相反, 综合作用的结果是流向速度变化不大。而旋转对横流速度的影响却是非常显著的, 图 1b 表示了这种状况。通过对比分析可以知道, 离心惯性力的作用是产生一个很大的横流速度, 而哥氏惯性力在这里则表现为加大向内的径向运动, 总的旋转效应是产生向外的径向流动。这说明, 在旋转边界层的计算中, 不考虑旋转的影响是不行的, 甚至可能得出完全错误的结果。

图 2 表示的是径向 $R = 0.8$ 处的动量厚度在第一及第四种状态下沿弦向的变化。与流向速度的变化相适应, 旋转使动量厚度略有变化。

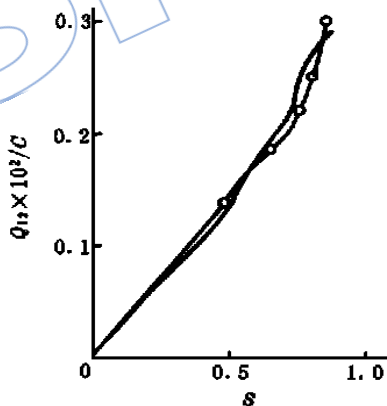


图 2 压气机转子吸力面动量厚度

3. 2 压力面

考虑到吸力面上的计算已揭示出旋转对流向参数的影响不大, 这里只给出径向速度的计算结果。图 3 所揭示的现象基本上与图 1b 一致, 只是数量上有所变化。

需要注意的是, 上述计算结果都是在低转速下获得的。虽然这时旋转对动量厚度以及流向速度等参数影响不大, 但是: (1) 在这种低

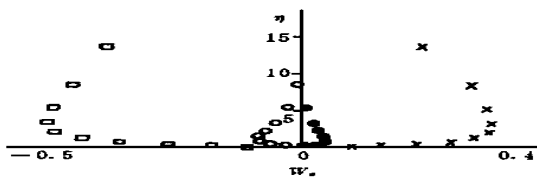


图 3 压力面横向分布 ($R = 0.8$, $S = 0.7$)

转速情况下, 已经反映出旋转对横向流动有一定影响, 与之有关的一些参数也必然会受到相应的影响; (2) 离心惯性力和哥氏惯性力的大小是随着转速提高而增大的, 可以预计随着转速的增加, 其作用也会越来越大。

4 法向压力梯度对边界层的影响

旋转的另一方面作用是使法向压力梯度 $\partial p / \partial x^2 \neq 0$, 这里将讨论由此带来的影响。考察的仍然是压气机转子叶面上的流动。

图 4 表示的是吸力面上 $R=0.8$ 、 $S=0.7$ 处的径向速度型。可以看出, 忽略法向压力梯度, 会使径向速度值变大, 比合理的计算结果在峰值处高 11.3% 左右。仍然需要引起注意的是, 在我们计算的工况下, 转速不高 (只有 1066rpm), $\partial p / \partial x^2$ 只占 $\partial p / \partial x^1$ 及 $\partial p / \partial x^3$ 的 6.1% 左右, 而 $\partial p / \partial x^2$ 仍然对计算结果产生一定的影响。可以预计随着转速的提高, $\partial p / \partial x^2$ 的值将会增加, 其作用也会越来越大。压力面上的计算结果也反映了上述现象。

在上面这个问题中, 由于转速不高, 再加上叶面几何条件的限制, $\cos(\bar{R}, \bar{e}_2)$ 及 $\cos(\bar{\Omega}, \bar{e}_3)$ 都比较小, 边界层流动仍主要由 $\partial p / \partial x^1$ 和 $\partial p / \partial x^3$ 控制。考虑到 $\partial p / \partial x^2 \neq 0$ 的影响后, 虽然对横向速度分布有一定的影响, 需引起理论研究的重视; 但对流向速度分布影响不大, 作为工程计算, 仍可按 $\partial p / \partial x^2 = 0$ 处理。为了更全面地考察旋转引起的 $\partial p / \partial x^2$ 对边界层的影响, 我们再考虑一下旋转圆柱面上的流动情况。在这种条件下, 由于 $\bar{R}$ 与 $\bar{e}_2$ 基本平行, 当转速较高时, 可以预计 $\partial p / \partial x^2$ 将会起到更大的作用。

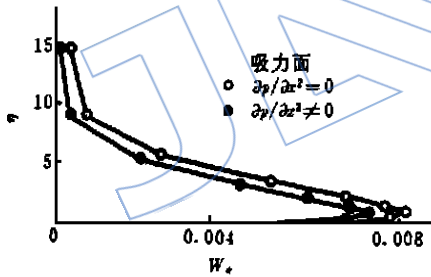


图 4 压气机转子吸力面横向速度分布

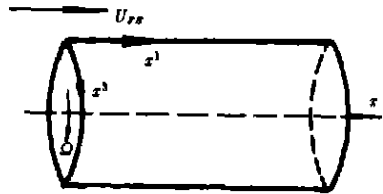


图 5 旋转圆柱面

空气以匀速 U_{FS} 流过半无限长圆柱面, 圆柱面以匀速转动, 见图 5。给定 $U_{FS}=10\text{m/s}$, 转速为 1200rpm, 圆柱半径 $r=0.5\text{m}$ 。假定流动由层流发展到湍流, 转捩雷诺数 $R_{cl}=3\times 10^5$ 。同压气机的情况一样, 湍流模型仍取简单的 C-S 模型。任取柱面上一点 ($x=1\text{m}$, $\alpha=54^\circ$), 考察旋转对流向及横向速度分布的影响。图 6 为流向速度的对比情况。从中可以看出, 在计算条件下, $\partial p / \partial x^2$ 对计算结果有很大影响。忽略法向压力梯度会使流向速度变小, 最大相差达 24% 左右。无论从理论研究还是从工程计算上来说, 这都是一个很大的差别。

再考察一下横向速度分布的对比结果, 见图 7。同样, 旋转对横向速度的影响更大。在本计算工况下, 考虑 $\partial p / \partial x^2 \neq 0$ 的影响, 会使横向流动改变方向, 其峰值增大 10 倍左右。

这组计算结果表明, 如果旋转速度足够大, 再加上物面几何条件的配合, 会使 $\partial p / \partial x^2$ 的作用不容忽视, 这与理论分析的结果是一致的。

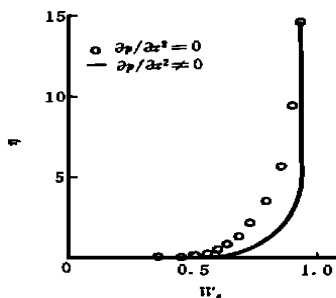


图 6 圆柱面上流向速度分布

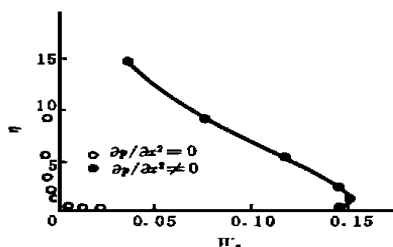


图 7 圆柱面上横向速度分布

5 结 论

从计算结果及分析中可以得到如下的基本结论: (1) 旋转对径向流动的影响最为显著, 它产生或加剧径向流动, 甚至会改变径向流的方向; (2) 旋转对流向的边界层参数也有一定的影响; (3) 从理论研究的意义上说, 旋转及由此引出的问题是重要的, 应予以充分的重视;; (4) 从任何意义上看, 离心惯性力和哥氏惯性力都是重要的, 不容忽视; (5) 对于工程计算来说, 旋转引起的 $\partial p / \partial x^2 \neq 0$ 的影响可视情况而定。对于高速转动, 在某些情况下 ($\cos(R, e_2)$ 及 $\cos(R, e_3)$ 很大), $\partial p / \partial x^2$ 的作用是很大的, 需要计及其影响; 如果 $\partial p / \partial x^2$ 的量级不高于 $\partial p / \partial x^1$ 和 $\partial p / \partial x^3$ 的量级, 再加上物面几何条件的限制, 作为工程计算, 仍可按传统的边界层理论处理。

参 考 文 献

- 1 Pouagare M, Galmes J M, Lakshminarayana B. An Experimental Study of the Compressor Rotor—Blade Boundary Layer. ASME 84-GT-193
- 2 Lakshminarayana B, ovindan T R. Analysis of Turbulent Boundary Layer on Cascade and Rotor Blades of Turbomachinery. In Fifth International Symposium on Airbreathing Engines, Feb. 16~21, 1981, Bangalore, India
- 3 Pouagare M, Lakshminarayana B, Galmes J M. Three Dimensional Flow Field Inside Compressor Rotor Passage, Including Blade Boundary Layers. NASA-CR-1697, 1988
- 4 Galmes J M, Lakshminarayana B. Three Dimensional Turbulent Shear Flows over Curved Rotating Bodies. AIAA Paper 83-0559
- 5 Sitaram N, Lakshminarayana B. End Wall Flow Characteristics and Overall Performance of an Axial Flow Compressor Rotor Stage. NASA CR 3671 1983
- 6 Toykura T, Kurokama J, Kimoto Y. Three Dimensional Boundary Layer Flow on Rotating Blades. Bulletin of the JSME, 1982, 25
- 7 Dring R P, Joslyn H D. Measurement of Turbine Rotor Blade Flows. ASME J. Engineering for Power, 1981, 103 (2)
- 8 Thompkins T Jr, Usab W J Jr. A Quasi-Three-Dimensional Blade Surface Boundary Layer Analysis for Rotating Blade Rows. ASME 81-GT-126
- 9 Anderson O L. Calculation of Three-Dimensional Boundary Layer on Rotating Turbine Blade. J. Fluids Eng. Mar. 1987, 109
- 10 华耀南. 叶轮机械转动叶片上三维可压边界层微分方程的求解方法. 中国工程热物理学会 1989 年热机气动热力学会议 892001, 1989
- 11 祖国君. 三维旋转边界层研究: [博士论文]. 北京航空航天大学, 1990

EFFECTS OF ROTATION ON 3-D BOUNDARY LAYER

Zu Guojun and Chen Maozhang

(*Beijing University of Aeronautics and Astronautics*)

ABSTRACT

The basic effects of rotation have been surveyed in this paper. On the basis of theoretical analysis of three-dimensional rotational incompressible boundary layer equations, the effects of centrifugal force, coriolis force and normal pressure gradients ($\partial p / \partial x^2 \neq 0$) due to rotation on the calculational results of these equations have been discussed in detail. The turbulent boundary layers on compressor rotor blades and on a rotating cylinder surface have been calculated as numerical examples. The results are consistent with the phenomena revealed in experiments. As a conclusion, the authors proposed that the coriolis force and the centrifugal force should be considered in the engineering computations of rotational problems and the normal pressure gradients are of great importance also in this case.

NUMERICAL STABILITY ANALYSIS IN 3-D BOUNDARY LAYER CALCULATION WITH BOX METHOD

Zu Guojun and Chen Maozhang

(*Beijing University of Aeronautics and Astronautics*)

ABSTRACT

The authors have proved that the Box method is unstable in three-dimensional boundary layer calculation although it is stable in two-dimensional boundary layer calculations. The Neumann stability analysis method has been applied to dealing with this problem. But the stability equation obtained is too complex to solve analytically, so the numerical computations have been proposed, and some valuable conclusions have been drawn. The results are in accordance with the phenomena that occurred in three-dimensional boundary layer calculations with Box method.

LIMIT POINT FLOW MODE ANALYSIS OF EXHAUST DIFFUSER AND OPERATION CHARACTERISTICS OF INJECTOR

Zhang Guozheng (*Gas Turbine Establishment of China*)

ABSTRACT

This paper analyzes the great effect of injection transfer characteristics on limit point operation parameters in an injector and flow character of injected flow according to injector limit point data measured in tests of Science Foundation Subject No. 24001. The actual flow mode at injector limit point is presented. The paper also analyzes the impassability of limit expansion ratio for the injector and the reason why the limit expansion ratio calculated from the injector engineering method is much less than its value obtained from the tests. The existing conclusion that "the injector limit expansion ratio is the highest possible pressure ratio" is refuted by the theoretical demonstration and injector operation characteristics measured in tests. It is proved that the operational expansion ratio can be increased much beyond the limit expansion ratio when the injector absorbs injection transfer mass. The "Operation test characteristics of injector" from low expansion ratio to high expansion ratio beyond the limit expansion ratio is first accomplished.